1. Uzasadnić, że zbiór

$$M = \{(te^{\alpha}\cos\alpha, te^{\alpha}\sin\alpha, t)\colon \quad \alpha \in \big((0, \ln(2\sqrt{2})\big),\ t \in (1,2)\}.$$

jest rozmaitością. Wyznaczyć miarę powierzchniową $l_M(M)$ (pole powierzchni M).

Rozwiązanie. Niech $g(\alpha,t) = (te^{\alpha}\cos\alpha, te^{\alpha}\sin\alpha, t)$ dla $(\alpha,t) \in [0, \ln(2\sqrt{2}] \times [1,2] := A$. Zbiór A jest zwarty jako iloczyn kartezjański dwóch przedziałów domkniętych. Z równości $g(\alpha,t) = g(\beta,s)$ wynika, że $t = s$, a z niej $e^{\alpha}\cos\alpha = e^{\beta}\cos\beta$ i $e^{\alpha}\sin\alpha = e^{\beta}\sin\beta$. Wobec tego zachodzi równość $e^{2\alpha} = \big(e^{\alpha}\cos\alpha\big)^2 + \big(e^{\alpha}\sin\alpha\big)^2 w = \big(e^{\beta}\cos\beta\big)^2 + \big(e^{\beta}\sin\beta\big)^2 = e^{2\beta}$, zatem $\alpha = \beta$. Udowodniliśmy różnowartościowość przekształcenia g na zbiorze zwartym A. Jest więc ono homeomorfizmem zbioru A na zbiór $g(A)$, więc też zbioru $\mathrm{int}(A) = (0, \ln(2\sqrt{2}) \times (1,2)$ na zbiór $g(\mathrm{int}(A)$. Przekształcenie g jest nieskoćzenie wiele razy różniczkowalne. Zachodzi wzór $Dg(\alpha,t) = \begin{pmatrix} te^{\alpha}(\cos\alpha - \sin\alpha) & e^{\alpha}\cos\alpha \\ te^{\alpha}(\sin\alpha + \cos\alpha) & e^{\alpha}\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wobec tego zachodzi równość$Dg(\alpha,t)^T \cdot Dg(\alpha,t) = \begin{pmatrix} 2t^2e^{2\alpha} & te^{2\alpha} \\ te^{2\alpha} & 1+e^{2\alpha} \end{pmatrix}$, a stąd wynika równość $\det(Dg(\alpha,t)^T \cdot Dg(\alpha,t)) = t^2e^{2\alpha}(e^{2\alpha}+2) > 0$. Przekształcenie liniowe $Dg(\alpha,t)$ jest więc włożeniem (injekcją, monomorfizmem). Z tego wszystkiego wynika, że $g(\mathrm{int}(A))$ jest płatem, czyli rozmaitością, która ma jednoelementowy atlas. Pole powierzchni $g(\mathrm{int}(A))$ jest równe $\int_A te^{\alpha}\sqrt{e^{2\alpha}+2}\,d\lambda_2 =$
$= \int_1^2 \int_0^{\ln(2\sqrt{2})} te^{\alpha}\sqrt{e^{2\alpha}+2}\,d\lambda_2 \overset{Fubini}{=\!=\!=} \int_1^2 tdt \cdot \int_0^{\ln\sqrt{8}} e^{\alpha}\sqrt{e^{2\alpha}+2}\,d\alpha \underset{\sqrt{2}dz = e^{\alpha}d\alpha}{\overset{z\sqrt{2}=e^{\alpha}}{=\!=\!=\!=\!=}} \frac{3}{2}\cdot 2\int_{1/\sqrt{2}}^2 \sqrt{z^2+1}\,dz =$
$=3\int_{1/\sqrt{2}}^2 \sqrt{z^2+1}\,dz = \frac{3}{2}\big(z\sqrt{z^2+1} + \ln(z+\sqrt{z^2+1})\big|_{1/\sqrt{2}}^2 = \frac{3}{2}\Big(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Big)$

Uwaga: Całkę $\sqrt{z^2+1}\,dz$ można obliczyć stosując np. jedno z podstawień:
$z = \frac{u^2-1}{2u}$, wtedy $dz = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{u^2})$, $u = z + \sqrt{z^2+1}$ (podstawienie Eulera);
$z = \sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})$, wtedy $dz = \cosh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})ds$ (też pochodzi od Eulera);
$z = \mathrm{tg}\,\varphi$, wtedy $\sqrt{z^2+1} = \frac{1}{\cos\varphi}$, $dz = (1+\mathrm{tg}^2\,\varphi)d\varphi$ (to z amerykańskich podręczników, których autorzy lubią całkować funkcję $\sec^3 x = \frac{1}{\cos^3 x}$ za pomocą jakiegoś podstawienia, którego ja nie lubię, bo ono narzuca się, gdy znany jest wynik całkowania, wolę metodą prowadząca do znalezienia całki funkcji $\cos^n x$, $n \in \mathbb{Z}$ – to w zasadzie indukcja).

2. Wyznaczyć miarę n wymiarową miarę Lebesgue'a obszaru

$$\{\mathbf{x} \in (0,\infty)^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Rozwiązanie. Niech $A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (0,1)^k\colon \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k < 1\}$. Wobec tego

$A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k)\colon \quad (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \in A_{k-1}, 0 < x_k < 1-(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}\}$. Z twierdzenia Fubiniego wynika, że szukana miara to $\int_{A_{n-1}}(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}))d\lambda_{n-1} =$
$= \int_{A_{n-2}}\int_0^{1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2})}(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}))dx_{n-1}d\lambda_{n-2} =$
$= \int_{A_{n-2}}\frac{1}{2}(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}))^2 d\lambda_{n-2} =$
$= \frac{1}{2}\int_{A_{n-3}}\int_0^{1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-3})}(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}))^2 dx_{n-2}d\lambda_{n-3} =$
$= \frac{1}{2\cdot 3}\int_{A_{n-3}}(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-3}))^3 d\lambda_{n-3} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\int_{A_{n-4}}(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-4}))^4 d\lambda_{n-4} =$
$= \ldots = \frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\int_{A_{n-1}}(1-x_1)^{n-1}d\lambda_1 = \frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\int_0^1(1-x_1)^{n-1}dx_1 = \frac{1}{n!}$ $\square$

Uwaga. Jeśli $B \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ i $w = (0,0,\ldots,0,h)$, $h > 0$ i $C(B,w) = \{tb+(1-t)w\colon \quad t \in (0,1)\}$, to $\lambda_n(C(B,w)) = \frac{1}{n}\lambda_{n-1}(B)h$. Zbiór $C(B,w)$ nazywany jest stożkiem o podstawie B i wierzchołku w. Składa się z odcinków, których jeden koniec jest w zbiorze B, a drugim jest w. Szczególne przypadki to zbiór z zadania drugiego, trójkąt, ostrosłup, stożek, różne miotełki opisywane przez topologów.

Wedle definicji podanej wyżej podstawa i wierzchołek są poza stożkiem, ale to nie ma znaczenia, bo ich miarą jest 0. Jeśli $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $\varphi(x,t) = (tx, (1-t)h)$, to φ jest dyfeomorfizmem zbioru $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,1)$ na zbiór $\{(x_1, x_2, \dots x_n)\colon \quad 0 < x_n < h\}$, przy czym $\varphi(x,0) = (0,\dots,0,h)$. Dla dowodu wzoru na miarę stożka wystarczy obliczyć wartość bezwzględną wyznacznika macierzy $D\varphi(x,t)$, czyli moduł jakobianu. Jest on równy $t^{n-1}h$. $\square$

3. Niech $g_n(x,y) = n^2 e^{-n^2(x^2+y^2)}$ i niech f będzie ograniczoną funkcją ciągłą na $\mathbf{R}^2$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \big(f * g_n(x,y)\big)$.

Rozwiązanie. Ów splot jest zdefiniowany jako $\int_{\mathbb{R}^2} f(x-s, y-t) n^2 e^{-n^2(s^2+t^2)} d\lambda_2 =$ $= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s, y-t) n^2 e^{-n^2(s^2+t^2)} ds dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\frac{s}{n}, y-\frac{t}{n}) e^{-(s^2+t^2)} ds dt$. Wypisywane całki istnieją, bo $e^{-x^2-y^2} < \frac{1}{1+x^2+y^2}$, a funkcja $|f|$ jest ograniczona. Po zamianie zmiennych możemy skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Z ciągłości f wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x-\frac{s}{n}, y-\frac{t}{n}) e^{-(s^2+t^2)} = f(x,y) e^{-(s^2+t^2)}$. Ze znanej równości $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(s^2+t^2)} d\lambda_2 = \pi$ wynika natychmiast, że $\lim\limits_{n\to\infty} \big(f * g_n(x,y)\big) = \pi f(x,y)$.

Uwaga. Przed zamianą zmiennych twierdzenia Lebesgue'a zastosować się nie da, bo w otoczeniu punktu $(0,0)$ funkcja g_n przyjmuje „duże" wartości. Zamiana zmiennych zmienia sytuację. $\square$

4. Gęstość kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ w dowolnym jej punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od początku układu współrzędnych. Znaleźć środek ciężkości tej kuli.

Uwaga: środek ciężkości zbioru mierzalnego $B \subset \mathbb{R}^n$ o zadanej (mierzalnej) gęstości ρ, to środek ciężkości tego zbioru względem miary μ takiej, że $d\mu = \rho d\lambda_n$.

Rozwiązanie. Niech K oznacza kulę zdefinowaną za pomocą nierówności $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$, więc o środku $(0,0,R)$ i promieniu R. Niech $z = R + r\sin\alpha$, $y = r\cos\alpha\sin\beta$ i $x = r\cos\alpha\cos\beta$, $0 < r < R$, $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, $|\beta| < \pi$. Te współrzędne opisują wszystkie punkty K z wyjątkiem punktów ze zbioru miary 0.
Zaczynamy od masy kuli K. Jest ona równa $\int_K (x^2+y^2+z^2) d\lambda_3 =$ $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R (r^2 + 2Rr\sin\alpha + R^2) r^2 \cos\alpha dr d\beta d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{5}R^5 + \frac{1}{2}R^5\sin\alpha + \frac{1}{3}R^5)\cos\alpha d\beta d\alpha =$ $= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{1}{5}R^5 + \frac{1}{2}R^5 \sin\alpha + \frac{1}{3}R^5)\cos\alpha d\alpha = 2\pi(\frac{2}{5}R^5 + \frac{2}{3}R^5) = \frac{32\pi}{15}R^5$. Pierwsza i druga współrzędna środka ciężkości to zera. Wynika to z symetrii względem płaszczyzn $x=0$ i $y=0$. Można też uzasadniać to tym, że $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\beta d\beta = 0 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\beta d\beta$. Zajmiemy się trzecią współrzędną. Trzeba obliczyć całkę $\int_K z(x^2+y^2+z^2) d\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R (r^2+2Rr\sin\alpha+R^2)(R+r\sin\alpha) r^2\cos\alpha dr d\beta d\alpha =$ $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{5}R^6 + \frac{1}{6}R^6\sin\alpha + \frac{2}{4}R^6\sin\alpha + \frac{2}{5}R^6\sin^2\alpha + \frac{1}{3}R^6 + \frac{1}{4}R^6\sin\alpha)\cos\alpha d\beta d\alpha = 2\pi R^6(\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{2}{3}) =$ $= \frac{8\pi}{3}R^6$. Wobec tego trzecia współrzędna środka ciężkości kuli K to $\frac{8\cdot 15}{3\cdot 32}R = \frac{5}{4}R$. $\square$

5. Załóżmy, że A jest borelowskim podzbiorem $\mathbb{R}^2$, a ponadto $\lambda_2(A) = \pi$. Udowodnić, że

$$\int_A \big(x^2+y^2\big) d\lambda_2(x,y) \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie. Niech $D = \{(x,y)\colon \quad x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Wtedy $\lambda_2(D) = \pi$. Niech $A_z = A\setminus D$ i $A_w = A\cap D$. Mamy $\lambda_2(A_z) = \lambda_2(D\setminus A)$ oraz $\int_{A_z}(x^2+y^2)d\lambda_2 \geqslant \lambda_2(A_z) = \lambda_2(D\setminus A) \geqslant \int_{D\setminus A}(x^2+y^2)d\lambda_2$. Stąd $\int_A (x^2+y^2)d\lambda_2 = \int_{A_z}(x^2+y^2)d\lambda_2 + \int_{A_w}(x^2+y^2)d\lambda_2 \geqslant \int_{D\setminus A}(x^2+y^2)d\lambda_2 + \int_{A_w}(x^2+y^2)d\lambda_2 =$ $= \int_D (x^2+y^2)d\lambda_2 = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} r^3 dt dr = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$. $\square$

6. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, klasy C^2, spełnia warunek $f''(x) > 1/(1+x^2)$. Udowodnić, że f nie ma asymptoty.

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli funkcja f ma asymptotę o równaniu $y = ax + b$ przy $x \longrightarrow \infty$, to dla dowolnych $c, d \in \mathbb{R}$ funkcja g zdefiniowana wzorem $g(x) = f(x) - cx - d$ też ma asymptotę i jest nią prosta o równaniu $y = (a-c)x + (b-d)$. Dodatkowo zaważmy, że $f''(x) = g''(x)$. Oznacza to, że zamiast funkcji f można rozpatrywać funkcję g zdefiniowaną jako $g(x) = f(x) - f'(0)x - f(0)$, dla której spełnione są równości $g(0) = 0 = g'(0)$.

Załóżmy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą funkcji g (przy $x \to \infty$). Oznacza to zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty} (g(x) - (ax+b)) = 0$, zatem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = a$. Ponieważ $g''(x) > \frac{1}{1+x^2} > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc funkcja g' jest ściśle rosnąca i wobec tego istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)$. Z reguły de l'Hospitala wynika, że $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = a$ i oczywiście $g'(x) < a$ dla każdego x.

Zachodzi równość $\int_0^x g''(t)dt = g'(x) - g'(0) = g'(x)$, w szczególności $a = \int_0^\infty g''(t)dt$. Stąd wynika, że $-b = \lim\limits_{x\to\infty} (ax - g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x (a - g'(u))du = \int_0^\infty (a - g'(u))du = \int_0^\infty \int_u^\infty g''(s)dsdu \overset{Fubini}{=\!=\!=}$ $= \int_0^\infty \int_0^s g''(s)duds > \int_0^\infty \int_0^s \frac{1}{1+s^2}duds = \int_0^\infty \frac{s}{1+s^2}ds = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1+x^2) = \infty$, co przeczy temu, że $b \in \mathbb{R}$. $\square$